

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений



П.А. Машаров

« 29 » марта 2024 г.

МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

У крупненная группа направлений
подготовки

Программа высшего образования

Направление подготовки

Профиль подготовки

Квалификация

Форма обучения

01.00.00 Математика и механика

Программа бакалавриата

01.03.02 Прикладная математика и
информатика

Прикладная математика и информатика

Бакалавр

Очная

Рабочая программа адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2024

Рабочая программа дисциплины «**Функциональный анализ**» для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (Профиль: Прикладная математика и информатика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 9 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2024 года.

Разработчик:

доцент кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
канд. физ.-мат. наук



Л.Л. Оridoroga

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол от 26.03.2024 г. № 10.

Заведующий кафедрой



В.В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
28.03.2024 г.



И.А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 27.03.2024 г. № 3.
Председатель



Л. И. Селякова

Руководитель основной профессиональной
образовательной программы,
д-р физ.-мат. наук, доцент
26.03.2024 г.



Р.Н. Нескородев

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1 Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы; дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Алгебра и геометрия.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Уравнения математической физики, Методы оптимизации, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы	01.03.02 Прикладная математика и информатика (Профиль: Прикладная математика и информатика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.10 Функциональный анализ
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	2 / 72

2.2 Распределение часов по периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы+ контроль	всего	
Очная	3	5	17	—	17	38	72	экзамен

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Фундаментальная подготовка в области функционального анализа: развитие у студентов абстрактного и логического мышления, математического кругозора и культуры, формирование у студентов научного подхода, овладение студентами совокупностью математических знаний о методах решения основных задач функционального анализа и интегральных уравнений.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-1.3. Умеет применять методы функционального анализа для решения фундаментальных и прикладных задач в профессиональной деятельности

4.3. Результаты обучения

ОПК-1.3.1. Знать: типовые методы решения задач по функциональному анализу

ОПК-1.3.2. Уметь выбирать и использовать необходимые математические методы, решать задачи дисциплины.

ОПК-1.3.3. Уметь применять на практике математические модели и компьютерные технологии.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Пространства	
1. Метрические пространства	1.1. Метрические пространства. Определение и примеры. 1.2. Предел последовательности и предел отображения метрических пространств. Непрерывность отображений. 1.3. Полные метрические пространства. 1.4. Сжимающие отображения. Теоремы о неподвижной точке. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра.
2. Нормированные пространства.	2.1. Нормированное пространство. Скалярное произведение. Предгильбертовы и гильбертовы пространства. 2.2. Неравенство Шварца. Норма, порожденная скалярным произведением. 2.3. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полные и тотальные системы векторов. 2.4. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
Раздел 2. Функционалы и операторы	
3. Линейные функционалы.	3.1. Линейные ограниченные функционалы. Норма функционала. Сопряжённое пространство. 3.2. Продолжение ограниченного функционала по непрерывности. Теорема Хана–Банаха. 3.3. Общий вид функционала в некоторых пространствах. 3.4. Сильная, слабая и *-слабая сходимость.
4. Операторы.	4.1. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. 4.2. Неограниченные операторы. Сопряжённый оператор. 4.3. Спектр и резольвента оператора. 4.4. Компактные операторы. Симметрические, самосопряжённые и унитарные операторы. 4.5. Дифференциальные операторы. Интегральные операторы и интегральные уравнения. Альтернатива Фредгольма.

6. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 3, семестр – 5

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС	Всего
Раздел 1. Пространства					
Метрические пространства	4	–	4	8	16
Нормированные пространства.	4	–	4	8	16
Раздел 2. Функционалы и операторы					
Линейные функционалы.	4	–	4	10	18

Операторы.	5	–	5	12	22
ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП	17		17	38	72

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

Раздел 1.

1. Метрические пространства.
2. Предел в метрическом пространстве.
3. Предельные и изолированные точки. Точки прикосновения.
4. Непрерывные отображения метрических пространств.
5. Внутренние, внешние и изолированные точки.
6. Открытые и замкнутые множества. Связь между ними.
7. Связь открытости (замкнутости) с непрерывностью.
8. Полные метрические пространства.
9. Теорема о пополнении.
10. Теоремы о неподвижной точке.
11. Метод последовательных итераций.
12. Интегральные уравнения Фредгольма.
13. Интегральные уравнения Вольтерра.
14. Интегральные уравнения с вырожденным ядром.
15. Теорема о вложенных шарах.
16. Предкомпактные множества.
17. Теорема Арцела.
18. Критерий Хаусдорфа.
19. Нормированные пространства.
20. Скалярное произведение. Неравенство Шварца.
21. Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
22. Ортогональное дополнение. Ортогональные и ортонормированные системы.
23. Процесс ортогонализации.
24. Равенство Парсеваля. Замкнутые ортонормированные системы.
25. Неравенство Бесселя.
26. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Раздел 2

27. Линейные ограниченные функционалы. Норма функционала.
28. Сопряжённое пространство.
29. Теорема Хана–Банаха.
30. Сильная, слабая и *-слабая сходимости.
31. Теорема Банаха–Штейнгауза.
32. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора.
33. Теорема Банаха об обратном операторе.
34. Сопряжённый оператор.
35. Самосопряжённые и унитарные операторы.
36. Альтернатива Фредгольма.

7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Раздел 1. Проверка, является ли данное пространство метрическим, исследование последовательности на сходимость в метрическом пространстве, исследование множества на

предкомпактность, приближённое решение интегральных уравнений, проверка принадлежности данного элемента данному пространству, нахождение нормы элемента, ортогонализация системы векторов в гильбертовом пространстве.

Раздел 2. Исследование функционала на линейность и ограниченность, нахождение норм функционалов, исследование последовательности на сильную, слабую и *-слабую сходимость, исследование оператора на линейность и ограниченность, нахождение норм операторов, решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.

7.3. Образец содержания экзаменационного билета

1. Сжимающие отображения. Две теоремы о неподвижной точке.
2. Сильная, слабая и *-слабая сходимость.
3. Образует ли метрическое пространство пара (X, ρ) , где $X = (0, 1)$, $\rho(x, y) = (x - y)^2$.
4. Исследовать на сильную и слабую сходимость в пространстве l^1 последовательности (x_n) , где

$$x_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{при } k \leq n \\ 0, & \text{при } k > n \end{cases}$$

5. Решить интегральное уравнение

$$x(t) = 1 + \frac{1}{10} \int_0^1 (t^2 s + t s^2) x(s) ds.$$

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже. Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку (зачет). Те, кого набранные баллы не устраивают, сдают экзамен (выполняют зачетную контрольную работу). Максимальное количество баллов за экзамен – 100. Оценка за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на экзамене и выставляется согласно принятому порядку.

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-2	Организационно-учебная работа в аудитории	10
	Самостоятельная работа	10
	Промежуточная контрольная работа	40
	Итоговая контрольная работа.	40
ИТОГО		100
Экзамен		100

Общий итог за семестр	100
-----------------------	-----

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

9. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- 1) для слепых и слабовидящих:
 - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
 - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
 - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.
- 2) для глухих и слабослышащих:
 - лекции оформляются в виде электронного документа;
 - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
 - экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- 3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
 - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
 - письменные задания выполняются на компьютере;
 - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- 1) для слепых и слабовидящих:
 - в печатной форме увеличенным шрифтом;
 - в форме электронного документа;
- 2) для глухих и слабослышащих:
 - в печатной форме;

- в форме электронного документа.
- 3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
 - в печатной форме;
 - в форме электронного документа.

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6), в Учебно-практическом вычислительном центре ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6, корпус 12).

Для проведения лекций требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской / сенсорным экраном / мультимедийный проектор с экраном и ноутбуком, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя.

Для проведения практических занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской / сенсорным экраном / мультимедийный проектор с экраном и ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя.

Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная маркерной доской или сенсорным экраном / мультимедийный проектор с экраном и ноутбук, персональные компьютеры, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в аудиториях Главного корпуса (ауд. 511, 605, 610).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

11. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

11.1. Основная литература

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа: [Учеб. пособие мат. специальностей ун-тов] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - 6-е изд. - М. : Наука, 1989. - 624 с.
2. Деркач, В. А. Лекции по функциональному анализу : Учеб. пособие / В. А. Деркач. - Донецк : ДонНУ, 2005. - 133 с.
3. Деревягин, М. С. Лекции по функциональному анализу [Текст]. Ч. 2 : Линейные операторы / М. С. Деревягин, В. А. Деркач ; Донецкий нац. ун-т. - Донецк : ДонНУ, 2008. - 111 с.
4. Деревягин, М. С. Задачи к курсу функционального анализа : Метод. пособие : [для студентов специальностей "Математика", "Статистика" и "Прикладная математика" дневной и заоч. форм обучения]. Ч. 1 : Метрические пространства / М. С. Деревягин, В. А. Деркач, М. М. Маламуд ; Донец. нац. ун-т. - Донецк : ДонНУ, 2005. - 49 с.
5. Деркач, В. А. Задачи к курсу функционального анализа : метод. пособие : [для студентов специальностей "Математика", "Статистика" и "Прикладная математика" всех форм обучения]. Ч. 2 : Линейные функционалы / В. А. Деркач, И. Ю. Доманов, М. М. Маламуд ; Донец. нац. ун-т. - Донецк : ДонНУ, 2006. – 46 с.

11.2. Дополнительная литература

6. Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для ун-тов по специальности "Математика" и "Прикл. математика" / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - 2-е изд. - М. : Физматлит, 2002. - 239 с.
7. Городецкий, В. В. Методы решения задач по функциональному анализу : [Учеб. пособие для ун-тов по специальностям "Математика", "Прикл. математика"] / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. - К. : Выща шк., 1990. - 477,[2] с.

12. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/>. – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://biblio-online.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный.

13. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).